CIENCIA
E INTERCULTURALIDAD

Año 16, Vol. 32, No. 1, Enero-Junio, 2023
ISSN 1997-9231 (Print) • ISSN 2223-6260 (Online) •
https://doi.org/10.5377/rci.v32i01.16233

Aplicaciones del cálculo integral en la compresibilidad de fluidos en un campo vectorial

Applications of the integral calculus in the compressibility of fluids in a vector field

Luz Juliana López López[1]
Rosa Emilia Rivera Díaz[2]
Sarahí del Carmen Carrasco Sánchez[3]
Walter Ismael Medina Martínez[4]
Cliffor Jerry Herrera Castrillo[5]

Resumen

Esta investigación ha analizado los conceptos y teoremas del cálculo integral en la compresibilidad de fluidos en un campo vectorial en la solución de problemas inéditos. Se trata de un estudio cualitativo porque permitió interpretar, recolectar y analizar conceptos y teoremas referentes al cálculo integral donde se suministró una rúbrica de evaluación para valorar el trabajo desarrollado por los participantes. Los resultados confirman la interdisciplinariedad de la asignatura con el uso de una metodología de solución por comprensión de dos problemas inéditos. Se concluye que, este proceso de investigación fortalece la formación académica, el pensamiento lógico y crítico

1 Profesor de Educación Media con Mención en Física-Matemática, estudiante de Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Correo: ljulianalopezl@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8973-2990

Teacher of Secondary Education with a Mention in Physics-Mathematics, student of the Regional Multidisciplinary Faculty of Esteli. Email: ljulianalopezl@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8973-2990

2 Profesor de Educación Media con Mención en Física-Matemática, estudiante de Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Correo: rr8432581@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0746-2390

Teacher of Secondary Education with a Mention in Physics-Mathematics, student of the Regional Multidisciplinary Faculty of Esteli. Email: rr8432581@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0746-2390

3 Profesor de Educación Media con Mención en Física-Matemática, estudiante de Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Correo: sarahicarrasco27@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2014-0660

Teacher of Secondary Education with a Mention in Physics-Mathematics, student of the Regional Multidisciplinary Faculty of Esteli. Email: sarahicarrasco27@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2014-0660

4 Licenciado en Ciencias de la Educación con Mención en Física Matemática, docente de Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Correo: medinawalter99@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0186-8832

Graduate en Sciences of Education with a Mention in Physics-Mathematics, Teacher at the Regional Multidisciplinary Faculty of Esteli. Email: medinawalter99@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0186-8832

5 Máster en Matemática Aplicada, docente de Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Correo: clifforjerryherreracastrillo@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7663-2499

Master in Applied Mathematics, Teacher at the Regional Multidisciplinary Faculty of Esteli. Email:clifforjerryherreracastrillo@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7663-2499

Recibido: 29/01/2023 - Aprobado: 22/05/2023

López López, L. J. ., Rivera Díaz, R. E., Carrasco Sánchez, S. del C., Medina Martínez, W. I. ., & Herrera Castrillo, C. J. (2022). Aplicaciones del cálculo integral en la compresibilidad de fluidos en un campo vectorial. *Ciencia E Interculturalidad*, 32(01), 23–42. https://doi.org/10.5377/rci.v32i01.16233

para la creación y resolución de problemas físicos en la compresibilidad de fluidos en un campo vectorial.

Palabras clave: evaluación, física, mecánica de fluidos, matemáticas

Abstract

This research has analyzed the concepts and theorems of integral calculus in the compressibility of fluids in a vector field in the solution of unprecedented problems. This is a qualitative study that allowed interpreting, collecting, and analyzing concepts and theorems referring to integral calculus where an evaluation rubric was provided to assess the work developed by the participants. The results confirm the interdisciplinarity of the subject with the use of a solution methodology by understanding two unprecedented problems. It is concluded that this research process strengthens academic training and logical and critical thinking for the creation and resolution of physical problems in the compressibility of fluids in a vector field.

Keywords: assessment, physics, mechanics fluid, mathematics

I. Introducción

Esta investigación aborda el estudio de las aplicaciones del Cálculo Integral en la compresibilidad de fluidos en un campo vectorial; se realizó con la finalidad de describir conceptos y teoremas relacionados con el tópico mencionado, para aplicarlos en la propuesta de solución de problemas inéditos, además se hizo una rúbrica de evaluación que permite la valoración del trabajo realizado.

Es importante saber que las aplicaciones del Cálculo Integral en las propiedades de los fluidos ocupan un papel relevante en la sociedad, ya que están presentes en la mayoría de las ingenierías, pero si se habla específicamente de la compresibilidad esta es aplicable en la Ingeniería Mecánica y esto viene a contribuir a los nuevos retos que impone un mundo moderno y competitivo. Desde este punto de vista, las aplicaciones de las integrales juegan un rol primordial en el desarrollo de la comunidad científica.

Este trabajo es de gran interés, porque en él se describen conceptos y teoremas básicos, se plantean herramientas analíticas propias de la temática que permiten a su vez el desarrollo de la intuición en situaciones "poco intuitivas" como ser aquellos contextos en los que la velocidad del fluido es comparable a la velocidad con la cual se propaga la información de un punto a otro. Estos elementos contribuyen al desarrollo de la comunidad universitaria, y a la vez permiten tener un precedente para futuras investigaciones relacionadas con este tópico.

Como plantea Herrera Castrillo (2022):

> El saber sobre las ciencias exactas como lo son las Matemáticas al mismo tiempo de ser agradables es importante para interactuar con claridad, eficacia e inteligencia en un mundo lleno de números, fórmulas, ecuaciones, donde esta ciencia se relaciona con otras para dar respuesta a muchas situaciones del mundo real y la necesidad del conocimiento matemático crece cada vez más al igual que su aplicación. (p. 38)

La viabilidad del estudio está en dependencia de la información recabada, sobre todo porque durante la búsqueda de datos no se encontraron suficientes fuentes bibliográficas y las que existen son escasas; por consiguiente, se limita a la sociedad a conocer respecto al tema, ignorando así la influencia que tiene en gran cantidad de elementos de la actualidad, tales como maquinarias de uso térmico, hidráulico, de transporte, por nombrar algunas. Se contó con artículos de sitios de internet confiables, algunos libros disponibles en digital y en las bibliotecas, así mismo de docentes de la universidad FAREM-Estelí. También se diseñó una rúbrica que permitirá la evaluación del presente trabajo. Se espera que llegue a manos de los estudiantes y docentes, para que puedan aplicarlos en su campo de estudio.

II. Revisión de literatura

2.1 Cálculo Integral

> El Cálculo Integral es una rama de las Matemáticas con más aplicaciones, en diversas áreas del conocimiento ya que permite plantear modelos que resuelven problemas surgidos del diario vivir del ser humano, mediante la cual puede analizar cualitativa y cuantitativamente los diferentes fenómenos que se le presenten en su entorno cotidiano y profesional. (García *et al*., 2021, p.2)

2.1.1 Propiedades básicas de integración

Hernández (2020) describe las propiedades básicas de integración de la siguiente manera:

- La integral de una suma algebraica de expresiones diferenciales:

$$\int f(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw$$

- Un factor constante que se multiplica a la variable independiente:

$$\int a\,dv=a\int dv$$

- La integral de la diferencial de la variable independiente: $\int dx = x$

- Integral donde "*v*" es la variable y "*n*" es el exponente de la variable:

$$\int v^n du = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.\ (pp.\ 10\text{-}13)$$

2.1.2 Integrales de flujo

Larson *et al*. (2000) afirman que "sea $f(x,y,z) = Mi + Nj + Pk$, donde *M, N y P* tienen derivadas parciales continúas sobre la superficie *S*, orientadas por un vector normal unitario *N*. La integral de *F*, a través de *S*" (p. 1356) se define como: $\int_s \int F.\ Nds$

2.2 Campo vectorial

Sean *M* y *N* funciones de dos variables *(x,y)*, definidas es una región R del plano. Se llama campo de vectores en R o cualquier función F definida por: $F(x,y) = Mi+Nj$. Sean *M, N y P* funciones de tres variables *x, y, z* definidas es una región *Q* del espacio. Se llama campo de vectores en *Q* a cualquier función F definida por: $F(x,y,z) = Mi+Nj+Pk$. (Larson *et al*., 2000, p.129)

2.2.1 Divergencia

Stewart (2012) afirma que:

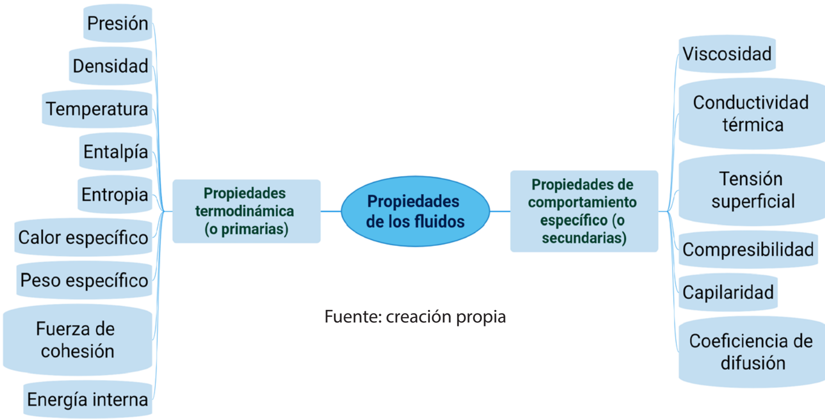
Sea *E* una región sólida simple y *S* la superficie frontera de *E*, dada con orientación positiva (hacia fuera). Sea *F* un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene *E*. Entonces $\oiint_S F.\hat{n}\, dS = \iiint divFdv = \iiint_E \nabla Fdv$ por consiguiente, el teorema de la divergencia plantea que, bajo las condiciones dadas, el flujo de F en el límite de la superficie es igual a la triple integral de la divergencia de F sobre E. (p .1129)

2.3 Mecánica de los fluidos

Yzocupe (2002) considera que:

La mecánica de fluidos es parte de la física y como tal, es una ciencia especializada en el estudio del comportamiento de los fluidos en reposo y en movimiento. Pero ¿Qué es un fluido?, un fluido se define como una sustancia que cambia su forma con relativa facilidad, los fluidos incluyen tanto a los líquidos, que cambian de forma, pero no de volumen, como los gases, los cuales cambian fácilmente de forma y de volumen. (párr. 6) Ver Figura 1.

Figura 1. Propiedades de los fluidos



Fuente: creación propia

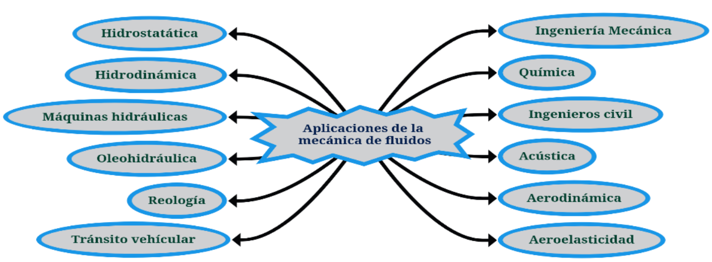
2.3.1 Comprensibilidad

La compresibilidad se refiere al cambio de volumen *(V)* de una sustancia que está sujeta a un cambio de la presión que se ejerce sobre ella. La cantidad usada normalmente para medir este fenómeno es el módulo volumétrico de elasticidad o, simplemente, módulo volumétrico, $E= -\frac{\Delta P}{\Delta v/v}$. (Mott, 1996, p. 11)

2.3.2 Aplicaciones de Mecánica de Fluidos

En la Figura 2, se muestran las diferentes aplicaciones que tiene la mecánica de fluidos en varias ciencias exactas, siendo de interés para este estudio las relacionadas con Física y Matemática.

Figura 2. Aplicaciones de los fluidos



Fuente: creación propia

2.4 Evaluación de los aprendizajes

> La evaluación es esencialmente un proceso de recolección e interpretación de evidencias de aprendizaje que permiten emitir juicios informados y tomar decisiones acerca de la progresión de los estudiantes en este proceso. Se considera que es un componente central de un proceso de enseñanza-aprendizaje de calidad. (Zuniga *et al*., 2014, p. 15)

2.4.1 Rúbrica

> Las rúbricas son recursos que cuentan con un gran potencial educativo, no solo al servicio de la educación primaria y secundaria, sino también en los estudios universitarios. En este ámbito educativo, las rúbricas son especialmente útiles por su contribución al desarrollo y a la evaluación de competencias, pilar fundamental de la educación superior. (Alcón Latorre, 2016, p. 11)

2.4.2 Importancia

Priego (2022) afirma que

> La rúbrica es importante porque la responsabilidad, la autorreflexión, proporciona criterios específicos para medir y documentar el progreso, facilita la comunicación con el alumno, te ayuda a ir puliendo los métodos de enseñanza, además que su uso no solo se enfoca en la materia, sino prácticamente todas. (párr.4)

III. Materiales y métodos

3.1 Método de investigación

Grimaldo Muchotrigo (2009) plantea que:

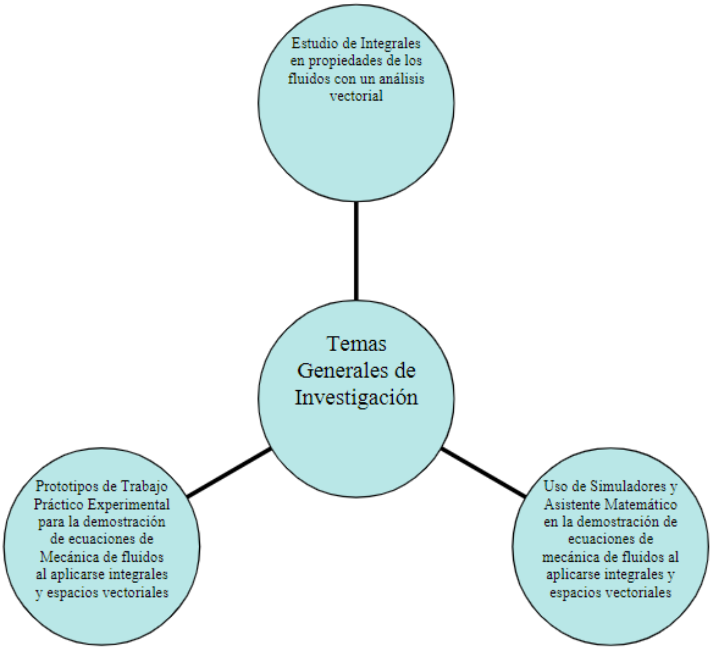
> La metodología cualitativa se aplica a estudios a nivel micro, por lo que normalmente intenta profundizar más en la situación objeto de estudio. En este sentido deberá existir un equilibrio entre la precisión, alcance y el enfoque para explicar el universo que estudia. (p. 6)

Según la profundidad u objetivo, el alcance de esta investigación es descriptiva, es decir, permite comprender la interpretación y análisis de los hechos, situaciones, vivencias, actitudes predominantes, circunstancias y experiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

3.2 Participantes

El presente estudio se realizó en el curso de Graduación de Profesor de Educación Media (PEM), con 41 participantes, 23 mujeres y 18 varones, durante el segundo semestre del año 2022 en la Facultad Regional Multidisciplinaria (FAREM) de Estelí, de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN) Managua, los cuales desarrollaron investigaciones sobre las siguientes temáticas que se pueden observar en la Figura 3.

Figura 3. Temas generales de investigación interdisciplinaria de Matemática y Física



Fuente: Herrera Castrillo (2023, p. 33)

También se tomaron como sujetos de investigación los diferentes libros, artículos y fuentes consultadas.

3.3 Instrumento de recogida de datos

En el trabajo interdisciplinario no se aplicaron entrevistas ni encuestas, sino que se utilizó “la guía de levantamiento de información documental” (Herrera Castrillo, 2023, p. 36). Este análisis documental se realizó mediante diferentes fuentes, principalmente libros y tesis.

> El análisis documental constituye un proceso ideado por el individuo como medio para organizar y representar el conocimiento registrado en los documentos, cuyo índice de producción excede sus posibilidades de lectura y captura la acción de este proceso se centra en el análisis y síntesis de los datos plasmados en dichos soportes mediante la aplicación de lineamientos o normativas de tipo lingüístico; a través de las cuales se extrae el contenido sustantivo que puede corresponder a un término concreto o a conjuntos de ellos tomados aisladamente, o reunidos en construcciones discursivas. Por consiguiente, su finalidad es facilitar la aproximación cognitiva del sujeto al contenido de las fuentes de información. (Peña y Pirela, 2007, p. 59)

3.4 Enfoque ético de la Investigación

> El ejercicio de la investigación científica y el uso del conocimiento producido por la ciencia demandan conductas éticas en el investigador y en el maestro. La conducta no ética carece de lugar en la práctica científica. Debe ser señalada y erradicada. Aquel que con intereses particulares desprecia la ética en una investigación, corrompe a la ciencia y a sus productos y se corrompe a sí mismo. Existe un acuerdo general en que hay que evitar conductas no éticas en la práctica de la ciencia. Es mejor hacer las cosas bien que hacerlas mal. Pero el problema no es simple, porque no hay reglas claras e indudables. La ética trata con situaciones conflictivas sujetas a juicios morales. (González Ávila, 2002, pp. 93-94)

3.5 Análisis de datos

Para el análisis de datos, se trabajó con las siguientes etapas (Ver Tabla 1)

Tabla 1. Etapas de análisis de datos

Recopilación de datos	Preparación de datos	Introducción de datos	Procesamiento / limpieza de datos	Interpretación de datos	Almacenamiento de datos

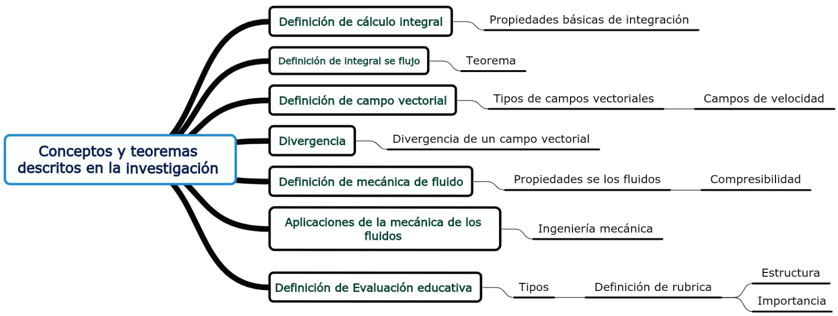
Fuente: Adaptado de Herrera Castrillo (2022, p. 43)

IV. Resultados y discusión

Se exponen los resultados de la investigación concerniente al tema Estudio de integrales en las propiedades de los fluidos con análisis vectorial, específicamente acerca de las aplicaciones del cálculo integral en la compresibilidad de fluidos en un campo vectorial. Este trabajo efectuado en el curso de Graduación para Profesor de Educación Media (PEM) permitió la integración de las asignaturas tales como: Estructura de la Materia, Cálculo II, Álgebra III y Evaluación Educativa, mismas que cursan los estudiantes en el sexto semestre de la carrera Física - Matemática en la universidad FAREM - Estelí, facilitando así la comprensión del tema.

Se deduce haber cumplido con los objetivos propuestos, el primero de ellos es describir conceptos y teoremas propios del estudio a realizar, para ello las integrantes han logrado recolectar, analizar y seleccionar la información para brindar datos confiables y contundentes que sean fácil de entender tanto para las autoras como para los lectores; cabe recalcar que se proporcionan definiciones claras y breves, las cuales servirán de referencias bibliográficas para docentes y estudiantes interesados en el tema; a continuación, en la Figura 4, se presentan los conceptos y teoremas abordados durante el desarrollo de la investigación.

Figura 4. Conceptos y teoremas descritos en la investigación



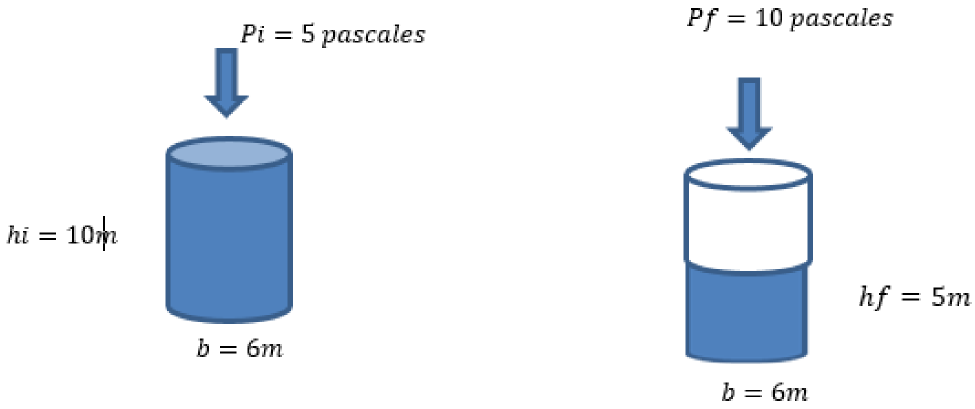
Fuente: creación propia

La aplicación del Cálculo Integral permitió resolver integrales definidas, dobles y triples para espacios tridimensionales en determinadas superficies, además se fortaleció el dominio de propiedades básicas de integración. Todos estos aprendizajes adquiridos se aplicaron para resolver ecuaciones de los teoremas de Integral de flujo y el de la Divergencia.

► Solución matemática del problema #1

Se presenta un cilindro con gas, de radio de base 3 m, altura inicial 10 m y se le ejecuta una presión de 5 pascales, una vez ejercida esta, se obtiene la mitad de la altura inicial y el doble de la presión inicial (Ver Figura 5).

Figura 5. Representación y datos del problema



Fuente: creación propia

También, es importante en la solución matemática del problema, analizar la comprensibilidad, como se muestra en la Figura 6, donde se detallan algoritmos para las diferentes soluciones obtenidas.

Figura 6. Cálculo de coeficiente de compresibilidad

Cálculo de la variación de presión

$\Delta p = pf - pi$

$\Delta p = 10\ pa - 5\ pa$

$\Delta p = 5\ pa$

Cálculo del área de la base:

$AB = \pi . r^2$

$AB = \pi(3\ m)^2$

$AB = 28\ m^2$

Volumen inicial

$\forall i = AB(hi)$

$\forall i = (28\ m^2)(10\ m)$

$\forall i = 280\ m^3$

Volumen final

$\forall f = (28\ m^2)(5m)$

$\forall f = 140\ m^3$

Cálculo de la variación de volumen

$\Delta\forall = \forall f - \forall i$

$\Delta\forall = 140\ m^3 - 280\ m^3$

$\Delta\forall = -140\ m^3$

Cálculo de coeficiente de com

$\boldsymbol{E = 10\ pa}$

$E = -\frac{\Delta p}{\Delta\forall / \forall}$

$E = -\frac{5\ pa}{-140\ \cancel{m^3}/280\ \cancel{m^3}}$

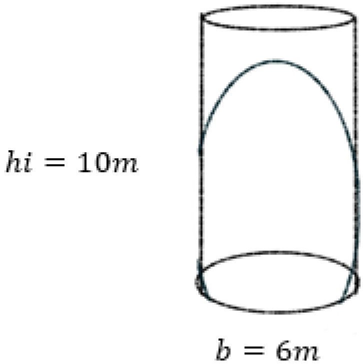
$E = -\frac{5\ pa}{-0.5}$

r.a) El coeficiente de compresibilidad es de 10 pascales.

Fuente: creación propia

Calculando la integral de flujo donde $F(x,y,z)=y\hat{i}+x\hat{j}+z\hat{k}$ y S es un paraboloide $Z= 9 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$; ver Figura 7 donde se muestran los datos del problema.

Figura 7. Representación del Cilindro



Fuente: creación propia

Sustituyendo $z = 0$ en paraboloide, se tiene que:

$Z= 9-x^2-y^2$; $0= 9-x^2-y^2$; $S_2 \rightarrow Z= 9-x^2-y^2$; $x^2+y^2= 9$

Parametrizando la ecuación de la circunferencia o S_1

$x^2+y^2= 9$ donde, $x= u, y= v, z= 9-u^2-v^2$

Se obtiene el vector; $\vec{r}(u,v)= (u,v,9-u^2-v^2)$ Circunferencia de radio 3 m

Encontrar derivadas parciales respecto a u:

$x= u, x= u^0, x=1, y=v, y=0, z=9-u^2-v^2, z=0-2u-0, z=-2u$

Se obtiene $r\vec{u}=(1,0,-2u)$

Encontrar derivadas parciales respecto a v:

$x=u, x=0, y=v, y=1, z=9-u^2-v^2, z=0-0-2v, z=-2v$

Se obtiene $(\vec{rv})= (0,1,-2v)$ $yS_1 \rightarrow x^2+y^2=9$

Encontrando $dS_1= \vec{ru} \times \vec{rv}\ dA$ $\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = 2u\hat{\imath} + 2v\hat{\jmath} + \hat{k}$

Se obtiene el valor de $dS_1= \vec{ru} \times \vec{rv}\ dA \rightarrow <2u,2v,1>$

Los vectores encontrados permiten calcular el diferencial de áreas de cada una de las superficies, la cual se resuelve con el producto cruz de los dos vectores obtenidos.

Dado que $f(x,y,z)= y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y $F(r(u,v))= f(u,v,9-u^2-v^2)$; entonces $F(r(u,v))= (v,u,9-u^2-v^2)$ se obtiene que:

$$\iint_{S1} F.dS_1 = \iint_{s1} F(r(u,v)).(\overrightarrow{ru} \times \overrightarrow{rv})dA \iint_{s1} < v,u,9-u^2-v^2 >.< 2u,2v,1 > dA$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 < 4r^2\cos\theta\,.\sin\theta + 9 - r^2(1) > dA \int_0^{2\pi}\int_0^3 < 4r^2\cos\theta\sin\theta + 9 - r^2 > rdrd\theta$$

Se sabe que $\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$, entonces $\cos\theta.\ \sin\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$; lo que conlleva a la siguiente expresión: $\int_0^{2\pi}\int_0^3 < 4r^3\frac{\sin 2\theta}{2} + 9r - r^3 > drd\theta$

Recordando que la integral de $\sin 2\theta = -\frac{1}{2}\cos 2\theta$ se obtiene:

$$\frac{81}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{2\pi} + \frac{81}{4}[\theta]_0^{2\pi} = \frac{81}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2(2\pi) + \frac{1}{2}\cos 2(0)\right] + \frac{81}{4}(2\pi)\text{=7290}$$

Recordar que $2\pi=360$, por lo que la equivalencia de $\frac{81}{4}(2\pi)$ es $\frac{81}{4}(360)$

Parametrizar la ecuación del paraboloide o S_2

$z= 9-x^2-y^2$ con $z \geq 0$ se tiene que:

$x = r.\cos\theta \rightarrow x = 3\cos\theta \rightarrow x = u$; $y = r.\sin\theta \rightarrow y = 3\sin\theta \rightarrow y = v$; $z = 0$

$y = r.\sin\theta \rightarrow y = 3\sin\theta \rightarrow y = v\vec{r}(u,v)= (u,v,0)$

Derivadas parciales respecto a *u:*

$x=u,\ x=1,\ y=v,\ y=0,\ z=0,\ \vec{ru}=(1,0,0)$

Derivadas respecto a *v:*

$x=u,\ x=0,\ y=v,\ y=1,\ z=0,\ \vec{rv}=(0,1,0)$

Encontrando $ds2 = \vec{ru} \times \vec{rv}\ d$

$$\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\hat{k} \qquad ds2\overrightarrow{ru} \times \overrightarrow{rv}dA = < 0,0,-1 >$$

$$\iint_{s2} F.ds2 = \iint_{s2} < v,u,0 >. < 0,0,-1 > dA = \iint_{s2} 0dA = \iint_{s2} F.ds2 = 0$$

Encontrando la integral de flujo:

$$\iint_{s} F.ds = \iint_{s1} F.ds1 + \iint_{s2} Fds2 = \iint_{s} Fds = 7290 + 0 = \iint_{s} Fds = 7290$$

r.b) la integral de flujo es de 7290, partiendo del campo vectorial $F(x,y,z) = y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + zk$ y S es un paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$

- Método de solución del problema #1:

Comprensión del problema

- Leer y analizar detalladamente el problema
- Identificar palabras claves que intervienen en el problema y la idea fundamental del mismo
- Distinguir los datos necesarios para la solución
- Reconocer lo que se debe encontrar para darle solución al problema

Elaboración del plan:

- Si se solicita calcular el coeficiente de compresibilidad. ¿Qué datos se necesitan para calcularlo?
- Si se pide calcular la integral de flujo, dado un campo vectorial, en cierta superficie. Verificar si se cuenta con los datos necesarios.

Ejecución del plan:

Para calcular el coeficiente de compresibilidad se debe realizar lo siguiente:

- Realizar los gráficos, figuras o diagramas que sean necesarios
- Calcular la variación de la presión

- Calcular el área de la base de la figura geométrica que se esté trabajando, para luego determinar el volumen inicial y final, de esta manera poder calcular la variación del volumen del mismo.

- Una vez obtenido los valores de la variación de presión, volumen inicial y variación del volumen, se procede a calcular el coeficiente de compresibilidad.

Para calcular la integral de flujo se necesita realizar lo indicado a continuación:

- Identificar las ecuaciones de las superficies donde se quiere calcular la integral de flujo

- Si son dos o más superficies en las que se debe trabajar, será necesario calcular la integral de flujo de cada una y luego realizar una sumatoria de las mismas.

- Primeramente, se debe parametrizar la ecuación y obtener el vector con respecto a *u y v*

- Encontrar las derivadas parciales con respecto a y de esta manera encontrar $r\vec{u}$

- Encontrar las derivadas parciales con respecto a y de este modo determinar $r\vec{v}$

- Calcular $ds= r\vec{u} \times r\vec{v}\ dA$, lo que indica es el producto cruz de los vectores $r\vec{u}$ y $r\vec{v}$

- Se debe seguir el mismo proceso para calcular las integrales de las demás superficies y después realizar la suma de estas y así se encontrará la integral de flujo de toda la figura geométrica

- Dar respuesta a las preguntas del problema

Evaluación del plan

- ¿Es correcto el resultado? ¿Es correcta la vía empleada para la solución del problema? Para el problema número uno, se obtuvieron dos respuestas:

Rpta a) El coeficiente de compresibilidad es de 10 pascales. Esta respuesta indica la compresibilidad del gas que se encuentra en el interior del cilindro, este fluido cambia de volumen, a partir de un cambio de presión ejercido sobre el mismo.

Rpta b) La integral de flujo es de 7290, partiendo del campo vectorial $F(x,y,z)= y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ el cual representa la dirección con que se mueve cada molécula del gas, solo se tendrá que aplicar valores a cada variable para poder evidenciar gráficamente y S es un paraboloide $z= 9-x^2-y^2$ con $z \geq 0$. Esta respuesta refleja la cantidad de flujo que fluye en una superficie dada, en problema propuesto se presentaron dos superficies:

una circunferencia y un paraboloide, por lo tanto, se calculó la integral de flujo de cada una y después realizar sumatoria de las mismas.

Este método de solución, se puede comparar por el propuesto por Young y Freedman (2009) el cual utiliza un método de solución basado en 4 pasos, los cuales son: Identificar, Plantear, Ejecutar y Evaluar, en donde en ocasiones resulta un poco complejo, llegar a un análisis detallado, ya que por lo general la evaluación se hace de manera directa, imponiendo una solución dada, sin saber procedimientos y detalles de interdisciplinariedad con conceptos matemáticos, físicos y en ocasiones de otra ciencias como química y biología.

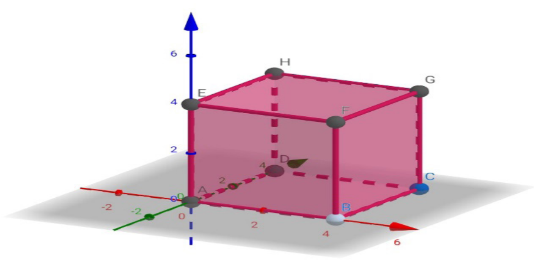
Con esto, no se indica que el método de Young y Freedman (2009) sea incorrecto, sino que se puede ampliar para hacerse más sólido y completo a nivel científico e interdisciplinario, en donde de alguna manera permita al lector refrescar conocimientos y notar una verdadera relación entre teorías, leyes, principios, axiomas y modelos Físicos Matemáticos.

Solución matemática del problema #2

Se presenta una figura cúbica (Figura 8) que contiene gas y que cuenta con los siguientes planos; $x=4, y=4, Z=4$. Se solicita calcular la divergencia partiendo del campo vectorial $F\,(x,y,z)= x^3\, y^2\, z\hat{\imath} + x^2\, z\hat{\jmath} + x^2\, y\hat{k}$

1) Graficar

Figura 8. Representación gráfica del cubo



Fuente: creación propia utilizando Geogebra

2) Calcular el gradiente de divergencia ($\nabla.\vec{F}$)

Es importante recalcar que para poder aplicar el teorema de divergencia es necesario calcular el gradiente ya que este resultado será integrado al teorema antes mencionada o bien conocido como integral de volumen.

$$\nabla.\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\ ;\ \nabla.\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}x^3y^2z + \frac{\partial}{\partial y}x^2z + \frac{\partial}{\partial z}x^2y;\ \nabla.\vec{F} = 3x^2y^2z$$

3) Aplicar el teorema de divergencia

$$\oiint_s \widehat{\mathrm{F}}\ \mathrm{nds} = \iiint_v \nabla\vec{F}\,dv = \oiint_s \hat{F}\,nds = \int_0^4\int_0^4\int_0^4 3x^2\,y^2z\,dxdydz = 11$$

Puesto que la divergencia es la medición de la densidad del fluido y dándose el caso de obtener como respuesta el número 11, siendo este un valor positivo, lo cual lleva a concluir que el gas es menos denso, además representa que los vectores son salientes del campo vectorial; en consecuencia, este se expande, ya que sus líneas de flujo divergen y de ahí el nombre. Es importante recalcar que, a diferencia de los líquidos, un gas es compresible, por lo tanto, la divergencia de sus campos de velocidades mide cuando las líneas de flujo se expanden o se comprimen.

Método de solución problema #2

► **Comprensión del problema**

- Leer y analizar detalladamente el problema
- Identificar palabras claves que intervienen en el problema y la idea fundamental del mismo
- Distinguir los datos necesarios para la solución
- Reconocer lo que se debe encontrar para darle solución al problema

► **Elaboración del plan**

- Si se solicita calcular la divergencia de un fluido, a partir de un campo vectorial ¿Qué datos se necesitan para calcularlo?

► **Ejecución del Plan**

Para calcular la divergencia de un fluido a partir de un campo vectorial se necesita realizar lo siguiente:

- Graficar la superficie donde se encuentra el fluido
- Calcular el gradiente de la divergencia $(\nabla.\vec{F})$, lo cual requiere determinar las derivadas parciales con respecto *a x, y, z*; luego será necesario realizar una suma de las mismas.
- Utilizar el teorema de divergencia; $\oiint_s \hat{F}\ nds = \iiint_v \nabla\vec{F}\ dv$ y los cálculos necesarios

- Dar respuesta a la pregunta del problema

► **Evaluación del plan**

- ¿Es correcto el resultado? ¿Es correcta la vía empleada para la solución del problema

Para el problema número dos, se obtuvo la siguiente respuesta: la divergencia es de 11, para el campo vectorial $F(x,y,z)= x^3 y^2 z\hat{i} + x^2 z\hat{j} + x^2 y\hat{k}$

El método de solución empleado, parte del Método de Pólya (1965), el cual consta de 4 pasos que permiten resolver de manera ordenada. La resolución de problemas matemáticos data desde la antigüedad; en algunos casos, se utilizaban símbolos matemáticos de manera empírica para representar cantidades materiales o cálculos de tiempo. Posteriormente, en la Edad Media, se habla de una matemática comercial para la labor de los mercaderes (Cruz, 2006).

Partiendo del objetivo número tres se ha diseñado una rúbrica de evaluación (Ver Figura 9) que facilitará la valoración del trabajo realizado, esta permitirá conocer el nivel de desempeño debido a que se evaluará de manera crítica y objetiva el aprendizaje adquirido por las autoras, asimismo, se manifestarán las debilidades y fortalezas que presenta el grupo de investigación. El instrumento evaluativo se elaboró en función de la estructura del presente documento y consta de los siguientes elementos:

Figura 9. Elementos de la rúbrica de evaluación

Fuente: creación propia

V. Conclusiones

De acuerdo con los objetivos planteados, el estudio realizado en el presente trabajo puede catalogarse como exitoso. Siendo evidente la aplicación del cálculo integral en la compresibilidad de fluidos en un campo vectorial. Con la aplicabilidad de lo antes mencionado se logró fortalecer la formación académica, se desarrolló diferentes habilidades como el hábito de la lectura e investigación, el pensamiento crítico y analítico, dando paso a que la información presentada proviene de fuentes seguras y confiables.

En este mismo se describieron conceptos y teoremas referentes a la temática, los que permiten analizar, comprender los procesos relacionados con integrales, integrales de flujo, campo vectorial, mecánica de fluidos, entre otros. De igual manera, con el enfoque cualitativo que se aplica a la investigación, se permitió la recolección y como se mencionaba anteriormente el análisis de los datos, teniendo como resultado, la propuesta de dos problemas con sus respectivas soluciones incluidas. Se logró diseñar un método de solución para dar respuestas a problemas inéditos, el cual siguiendo los pasos se puede entender de una forma clara, concisa y precisa la ejecución del problema.

Cabe destacar que se diseñó una rúbrica de evaluación en función de la estructura del presente documento, la cual es un instrumento idóneo para valorar los aprendizajes.

VI. Lista de referencias

Alcón Latorre, M. (2016). La rúbrica como instrumento de evaluación en los estudios universitarios. Observar. *Revista Electrónica De Didáctica De Las Artes,* 10(1), 1-15. https://www.observar.eu/ojs/index.php/Observar/article/view/70

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. Tomo 1.* Educación Cubana.

García, A., Villatoro, T., & Palacios, E. (2021, enero). *Guía Didáctica Cálculo Integral.* https://www.cobach.edu.mx/doctos/guias-academicas-propedeuticas/calculo-integral.pdf

González Ávila, M. (2002). Aspectos éticos de la investigación cualitativa. *Revista Iberoamericana de educación*. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/20984

Grimaldo Muchotrigo, M. (2009). *Investigación cualitativa. Manual de la investigación en psicología*. https://n9.cl/2bpnc

Hernández, L. (2020, julio). *Propiedades de la integral indefenida*. (U. A. Hidalgo, Ed.) https://repository.uaeh.edu.mx/bitstream/bitstream/handle/123456789/19697/propiedades-integral-indefinida.pdf?sequence=1

Herrera Castrillo, C. J. (2023). Interdisciplinariedad a través de la Investigación en Matemática y Física. *Revista Chilena De Educación Matemática*, 15(1), 31–45. https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i1.126

Herrera Castrillo, C. J. (2022). Metodologías para el aprendizaje por competencias de Ecuaciones Diferenciales aplicadas en Física al utilizar tecnología en la carrera Física Matemática. *Revista Torreón Universitario*, 11(32). https://doi.org/10.5377/rtu.v11i32.15065

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (2000). *Cálculo y Geometría Analítica (Sexta Edición ed., Vol. 2)*. (S. d. Editores, Ed.). MCGraw-Hill interamericana. https://www.academia.edu/31620687/C%C3%A1lculo_Vol_2_6ta_Edici%C3%B3n_Roland_E_Larson_Robert_R_Hostetler_Bruce_H_Edwards

Mott, R. (1996). *Mecánica De Los Fluidos Aplicada*. https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=xUavRou66PEC&oi=fnd&pg=PA1&dq=info:xy6RMjko-

Peña Vera, T., & Pirela Morillo, J. (2007). La complejidad del análisis documental. *Revista Información, cultura y sociedad*, 55-81. http://www.scielo.org.ar/pdf/ics/n16/n16a04.pdf7sJ:scholar.google.com/&ots=wREkADSvJQ&sig=Ylt7ZNM3FKGagg86MmojaWEyZQk#v=onepage&q&f=false

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. https://ciencia-ymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf

Priego, J. (2022). *La Importancia Del uso de las Rúbricas de La Evaluación*. https://es.scribd.com/document/28361246/La-Importancia-Del-Uso-de-Las-Rubricas-de-La-Evaluacion-Docente

Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables transcendentes tempranas*. Cengage Learning Editores, 2012. https://cal3-ua.jimdofree.com/

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2009). *Física Universitaria con Física Moderna (Vol. 2)*. Pearson Educación. http://www.unet.edu.ve/gilbpar/images/LIBROS_FISICA/Sears_Zemansky_LIBRO-signed.pdf

Yzocupe, V. A. (2002, Noviembre-Diciembre). *Mecánica de los fluidos e ingeniería de Fluidos*. https://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual/publicaciones/actualidad/a%C3%B102_n15_2002/mecanica_fluidos.htm

Zuniga, M., Solar, M., Lagos, J., Báez, M., & Herrera, R. (2014). *EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN INNOVACIONES CURRICULARES DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR*. https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=que+es+la+evaluaci%C3%B3n+de+los+aprendizajes+en+educaci%C3%B3n+&btnG=#d=gs_qabs&t=1670618431803&u=%23p%3DzhXf7bkMEkJ